

Title	級数の總和法ニツイテ
Author(s)	花井, 七郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(11) p.352-p.354
Issue Date	1948-11-01
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75252
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

118. 級數ノ總和法ニツイテ

京都工專 花井七郎 (8月10日)

$A = (a_{ik})$ ヲーツノ無限行列トシ $x = \{\xi_i\}$ ヲーツノ數列トスル。ソシテ
 $A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i=1, 2, \dots)$ ハ收斂スルモノトスル。
 數列 $\{A_i(x)\}$ ノ極限值 $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i(x)$ ガ存在スルトキ、 x ハ總和法 A ニヨツテ
summable デアルト云フ。S. Banach¹⁾ ハ次ノ定理ヲ証明シテキル。即チ
 A ヲ *permanent* ナ總和法トシ、 $y_0 = \{\eta_i^0\}$ ハーツノ收斂數列トスル。若
 シ $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ 且ツ $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$ ナル如キ任意ノ數列 $\{\alpha_i\}$ 對
 シテ $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$ ガ成立スルトキハ 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテーツノ收斂數列
 x ガ存在シテ $|A_i(x) - \eta_i^0| < \varepsilon, (i=1, 2, \dots)$

此處デハ上ノ定理ノ逆ガ成立スルコトヲ証明シ ソレカラ導カレル結果ヲ述ベル。

以下定義ノ記号等ハ S. Banachニ從フコトニスル。

【定理】 A ヲ *permanent* ナ總和法トシ、 $y_0 = \{\eta_i^0\}$ ハーツノ收斂數列
 トスル。若シ任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對應シテーツノ收斂數列 $x = \{\xi_i\}$ ガ存在
 シテ $|A_i(x) - \eta_i^0| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots)$ ガ成立スルトキハ $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ 且
 ツ $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0, (k=1, 2, \dots)$ ナル任意ノ數列 $\{\alpha_i\}$ = 對シテ $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$

【証明】 今、收斂數列ノ全体カラナル空間ヲ (C) トスレバ (C) ハーツノ

Banach 空間デアル。 $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ デアルカラ、 $x = \{\xi_i\} \in (C)$ トスル
 トキ

(1) $f(x) = \alpha \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, 但シ α ハ 常数.
ハ空間 (C) = 於ケル線型汎函数デアル.

仮定ニヨツテ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ ナル $\{\varepsilon_j\}$ = 対応シテ (C) ノ 点列 $\{x_j\}$ ガ 存在シテ

$$(2) \quad |A_i(x_j) - \eta_i^0| < \varepsilon_j \quad (i = 1, 2, \dots)$$

然ルニ A ハ permanent デアルカラ $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i(x_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^j$
但シ $x_j = \{\xi_n^j\}$ トスル.

然ツテ 数列 $A_1(x_j), A_2(x_j), \dots$ ハ空間 (C) ノ 点デアル.

今此ノ数列ヲ $A(x_j)$ ニテ表ハスコトニスル.

$$(2) \text{ヨリ} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} A(x_j) = y_0 \quad (\text{勿論 (C) ノ ノルム = ヨツテ 収斂})$$

$$(1) \text{ヨリ} \quad f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{i \rightarrow \infty} A_i(x_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_j)$$

$$\text{然ルニ} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} A_i(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^j + \text{etc.} =$$

$$f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^j + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} \xi_k^j \right)$$

然ルニ A ハ permanent デアルカラ O. Toeplitz ノ 定理²⁾ニヨリ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |\alpha_{ik}| \cdot |\xi_k^j| \leq M \cdot \|x_j\| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|, \quad M \text{ ハ 常数}$$

$$\text{従ツテ} \quad f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{j \rightarrow \infty} \xi_n^j + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j \left(- \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_{ik} \right)$$

然ルニ 假定カラ $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_{ik} = 0$, ($k = 1, 2, \dots$) ナル故ニ

$$f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^j$$

然ルニ $f(x)$ ハ (C) ニオケル 汎函数デアル.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f\{A(x_j)\} = f(y_0)$$

従ツテ

$$(3) \quad \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \alpha \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^j \right)$$

$$(2) \text{ヨリ} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} |A_i(x_j) - \eta_i^0| \leq \varepsilon_j.$$

従ツテ 今 $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^0 = \eta^0$ トスルバ A ハ permanent デアルカラ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^j \right) = \eta^0$$

従つて (3) より $\sum_{i=1}^{\infty} d_i \eta_i^0 = 0$ [証終]

次ニ A ハ *permanent* ナ累加法トシ 空間 (C) ノスベテノ点 x ニ對シテ $\{A_i(x)\}$ ナル数列ヨリナル集合ヲ S_A トスレバ、明カニ $S_A C(C)$ 。前記ノ *Banach* ノ定理ト [定理] 1 トカラ次ノ定理ガ成立スル。

[定理] 2 S_A ガ空間 (C) ニテ對ル處ニ *dense* ナアルタメノ必要且ツ十分

ナル條件ハ $\sum_{i=1}^{\infty} |d_i| < \infty$ 、且ツ $\sum_{i=1}^{\infty} d_i a_{ik} = 0$

($k = 1, 2, \dots$) ナルトキハ $d_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots$)

[証明] 必要ナルコト。今点 $y_0 = \{\eta_i^0\}$ 、但シ $\eta_1^0 = 1, \eta_i^0 = 0 (i \neq 1)$

ヲ考ヘル。明カニ $y_0 \in (C)$ デアルカラ [定理] 1 カラ $\sum_{i=1}^{\infty} d_i \eta_i^0 = d_1 = 0$

同様ニシテ $d_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots$)

十分ナルコト $S. Banach$ ³⁾ ニヨツテ証明サレテアル。

[定理] 3. A ハ *permanent* 且ツ *reversible* ナ累加法トスル。

若シ $\sum_{i=1}^{\infty} |d_i| < \infty$ 且ツ $\sum_{i=1}^{\infty} d_i a_{ik} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) デアツテ而モ或一ツノ

i ニ對シテ $d_i \neq 0$ ナル如キ数列 $\{d_i\}$ ガ存在スルトキハ、 A ニヨツテ *separable* デ而モ一次独立ナル發散數列ノスベテヨリナル集合ノ濃度ハ \aleph_1 以上デアル。

(即チ可數番延限個以上デアル)

[証明] [定理] 2 より、 (C) ノ或一ツノ球 K ガ存在シテ $K \cdot S_A = 0$ 。今 K ノ中

心ヲ $x_0 = \{\xi_k^0\}$ 、半径ヲ γ_0 トスル。 (C) ノ点 x_n ヲ次ノ如キモノトスル。

$x_n = \{\xi_k^n\}$ 但シ $n \neq k$ ノトキハ $\xi_k^n = \xi_k^0$, $\xi_k^n = \xi_k^0 + \gamma_n$ ($0 < \gamma_n < \gamma_0$ トス)

然ルトモ空間 (C) ノ点列 $\{x_n\}$ ハ明カニ球 K ニ含マレ且ツ一次独立デアル。

而シテ A ハ *reversible* デアルカラ $x_n = A(y_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)

ナル發散數列 y_n ノ集合ハ一次独立デアルコトハ容易ニ分ル。

[証終]

1) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*. p. 91.

2) 同上 p. 90

3) 同上 p. 93